

8 ★ En calculant un déterminant, vérifier si les vecteurs suivants forment une base de l'e.v. E donné :

- 1) $u_1 = (1 + i, 1, i), u_2 = (i, -1, 1 - i), u_3 = (2 - i, 0, -i)$ avec $E = \mathbb{C}^3$.
- 2) $P_1 = 4X^2 + 3X - 1, P_2 = 2X^2 - 2X + 3, P_3 = 3X^2 + 2X - 4$, avec $E = \mathbb{R}_2[X]$.
- 3) $P_1 = X^2, P_2 = X(X - 1), P_3 = (X - 1)^2$, avec $E = \mathbb{R}_2[X]$.
- 4) $u_1 = (\lambda + 3, 3\lambda + 1), u_2 = (2\lambda + 3, 5\lambda + 4)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

9 ★★ Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(P) = P - \alpha XP'$$

- 1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- 2) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α l'application φ est bijective.

10 ★★ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $f(M) = AM$.

- 1) Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$, avec \mathcal{B}_c la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- 2) Montrer que $\det(f) = (\det A)^2$.
- 3) En déduire une CNS pour que f soit bijective.

11 ★★ (*Identité de Lagrange*) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer l'identité suivante :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Démontrer cette identité en calculant $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$ de deux façons.

12 ★★ En utilisant les formules de Cramer, trouver les fonctions f et g de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x) \cos x + g(x) \sin x = 0 \\ -f(x) \sin x + g(x) \cos x = \cos^3 x \end{cases}$$

13 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(\text{Com}A) = (\det A)^{n-1}$.

14 ★★

- 1) Montrer que $\text{Com}(I_n) = I_n$.
- 2) Montrer que pour toutes matrices inversibles A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\text{Com}(B)$.